第 3 講　複素数と２次方程式

PART1　複素数とその計算

例題

(1)　次の計算をせよ。

(i)　$(5-4i)+(2+2i)$　　(ii)　$(3-4i)^2$　　(iii)　$\dfrac{1}{2+i}$

(2)　次の等式を満たす実数 x, y の値を求めよ。

(i)　$x+3i=-4+yi$　　(ii)　$(4+2i)x+(1+4i)y=-7$

Point Pickup

練習

(1)　次の計算をせよ。

(i)　$(3+2i)-(2-i)$　　(ii)　$(3+5i)^2$　　(iii)　$\dfrac{3+2i}{2-i}$

(2)　次の等式を満たす実数 x，y の値を求めよ。

(i)　$(1-2i)(x+yi)=2+6i$　　(ii)　$\dfrac{x+2i}{1+3i}=1+yi$

第 3 講　PART1 確認問題

次の計算をせよ。

1　$(5+3i)-(6-i)=$ [アイ] $+$ [ウ] i

2　$(2+3i)^2=$ [エオ] $+$ [カキ] i

3　$\dfrac{3+4i}{1-i}=\dfrac{[クケ]}{[コ]}+\dfrac{[サ]}{[シ]}i$

次の等式を満たす実数 x，y の値を求めよ。

4　$(1+3i)(x+yi)=17+i$

$x=$ [ス]，$y=$ [セソ]

5　$\dfrac{x+14i}{2+i}=8+yi$

$x=$ [タチ]，$y=$ [ツ]

第 3 講　複素数と２次方程式

PART1　複素数とその計算

例題

(1)　次の計算をせよ。

(i)　$(5-4i)+(2+2i)$　　(ii)　$(3-4i)^2$　　(iii)　$\dfrac{1}{2+i}$

(2)　次の等式を満たす実数 x，y の値を求めよ。

(i)　$x+3i=-4+yi$　　(ii)　$(4+2i)x+(1+4i)y=-7$

(1) (i)　$(5-4i)+(2+2i)=(5+2)+(-4+2)i=7-2i$

(ii)　$(3-4i)^2=9-24i+16i^2=9-24i+16\cdot(-1)=-7-24i$

(iii)　$\dfrac{1}{2+i}=\dfrac{2-i}{(2+i)(2-i)}=\dfrac{2-i}{4-i^2}=\dfrac{2-i}{4+1}=\dfrac{2-i}{5}=\dfrac{2}{5}-\dfrac{1}{5}i$

(2) (i)　x，y は実数より　$x=-4$，$y=3$

(ii)　左辺を変形すると

$$(4x+y)+(2x+4y)i=-7$$

$4x+y$，$2x+4y$ は実数より　$4x+y=-7$，$2x+4y=0$

よって　$x=-2$，$y=1$

練習

(1)　次の計算をせよ。

(i)　$(3+2i)-(2-i)$　　(ii)　$(3+5i)^2$　　(iii)　$\dfrac{3+2i}{2-i}$

(2)　次の等式を満たす実数 x，y の値を求めよ。

(i)　$(1-2i)(x+yi)=2+6i$　　(ii)　$\dfrac{x+2i}{1+3i}=1+yi$

(1) (i)　$(3+2i)-(2-i)=(3-2)+(2+1)i=1+3i$

(ii)　$(3+5i)^2=9+30i+25i^2=9+30i+25\cdot(-1)=-16+30i$

(iii)　$\dfrac{3+2i}{2-i}=\dfrac{(3+2i)(2+i)}{(2-i)(2+i)}=\dfrac{6+7i+2i^2}{4-i^2}=\dfrac{6+7i-2}{4+1}=\dfrac{4+7i}{5}=\dfrac{4}{5}+\dfrac{7}{5}i$

(2) (i)　左辺を変形すると

$$x+yi-2xi+2y=2+6i$$

つまり　$(x+2y)+(y-2x)i=2+6i$

$x+2y$，$y-2x$ は実数より　$x+2y=2$，$y-2x=6$

よって　$x=-2$，$y=2$

(ii)　左辺を変形すると

$$\frac{(x+2i)(1-3i)}{(1+3i)(1-3i)}=\frac{x-3xi+2i-6i^2}{1-(3i)^2}=\frac{(x+6)+(-3x+2)i}{10}=\frac{x+6}{10}+\frac{-3x+2}{10}i$$

よって，与えられた等式は

$$\frac{x+6}{10}+\frac{-3x+2}{10}i=1+yi$$

$\dfrac{x+6}{10}$，$\dfrac{-3x+2}{10}$，y は実数より　$\dfrac{x+6}{10}=1$，$\dfrac{-3x+2}{10}=y$

よって $x=4$，$y=-1$

(別解)

等式の両辺に $1+3i$ を掛けると

$$x+2i=(1+yi)(1+3i)$$

$$x+2i=(1-3y)+(3+y)i$$

x，$1-3y$，$3+y$ は実数より　$x=1-3y$，$2=3+y$

よって　$x=4$，$y=-1$

第 3 講　PART1 確認問題 解答

1

[正解] アイ：-1，ウ：4

[解説]

$$(5+3i)-(6-i)=5+3i-6+i \quad \text{[A]}$$
$$=(5-6)+(3+1)i$$
$$=\mathbf{-1+4i}$$

[A]　虚数単位 i を文字のように扱い，実部，虚部それぞれについて和，差を求める。

2

[正解] エオ：-5，カキ：12

[解説]

$$(2+3i)^2=4+12i+9i^2 \quad \text{[B]}$$
$$=4+12i+9\cdot(-1)$$
$$=\mathbf{-5+12i}$$

[B]　$i^2=-1$

3

[正解] クケ：-1，コ：2，サ：7，シ：2

[解説]

$$\frac{3+4i}{1-i}=\frac{(3+4i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} \quad \text{[C]}$$
$$=\frac{3+7i+4i^2}{1-i^2}=\frac{3+7i-4}{1+1} \quad \text{[D]}$$
$$=\frac{-1+7i}{2}=\mathbf{-\frac{1}{2}+\frac{7}{2}i}$$

[C]　分母と共役な複素数を分母と分子に掛け，分母を実数にする。
$$(a+bi)(a-bi)=a^2-b^2i^2$$
$$=a^2+b^2$$

[D]　$i^2=-1$

4 **[正解]** ス：2，セソ：-5

[解説]

左辺を変形すると

$$x+yi+3xi-3y=17+i$$

つまり　$(x-3y)+(y+3x)i=17+i$

$x-3y$，$y+3x$ は実数であるから

$$x-3y=17,\ y+3x=1$$ [E]

よって

$$\boldsymbol{x=2,\ y=-5}$$

[E]　a，b，c，d が実数のとき
$a+bi=c+di$
$\iff a=c$ かつ $b=d$
特に
$a+bi=0 \iff a=0$ かつ $b=0$

5 [正解] タチ：13，ツ：3

[解説]

左辺を変形すると

$$\frac{x+14i}{2+i}=\frac{(x+14i)(2-i)}{(2+i)(2-i)}$$

$$=\frac{2x-xi+28i-14i^2}{4-i^2}$$

$$=\frac{(2x+14)+(-x+28)i}{5}$$

$$=\frac{2x+14}{5}+\frac{-x+28}{5}i$$

よって，与えられた等式は

$$\frac{2x+14}{5}+\frac{-x+28}{5}i=8+yi$$

$\frac{2x+14}{5}$，$\frac{-x+28}{5}$，y は実数であるから

$$\frac{2x+14}{5}=8,\quad \frac{-x+28}{5}=y$$ [F]

よって　$\boldsymbol{x=13}$，$\boldsymbol{y=3}$

[F]　a，b，c，d が実数のとき
　$a+bi=c+di$
　　$\Longleftrightarrow$ $a=c$ かつ $b=d$
特に
　$a+bi=0 \Longleftrightarrow a=0$ かつ $b=0$

（別解）

等式の両辺に $2+i$ を掛けると

$$x+14i=(8+yi)(2+i)=16+8i+2yi-y$$

$$=(16-y)+(8+2y)i$$

x，$16-y$，$8+2y$ は実数であるから

$$x=16-y,\quad 14=8+2y$$ [F]

よって　$\boldsymbol{x=13}$，$\boldsymbol{y=3}$